拡張不等式
(第１編) 複素数でも使える不等式

Yoshirou Oka*

2024 年 4 月 10 日 (第 0.1 版)

* https://falkirkinspired.com/, saikorodeka@yahoo.co.jp

要旨

複素数同士の大小関係を論じる事はできないとされていますが、大小関係の概念をより一般化することで、複素数においての不等式を定義することができます。まずは、不等式の概念を一般化した拡張不等式の定義からその性質を導き出し、さらに、それを複素数に適用します。そして、複素数の範囲で考えた拡張不等式の解の集合を求めます。

目次

1　はじめに

数学において、不等式は数値や関数の大小関係を表すための基本的なツールとして広く用いられています。しかし、複素数の領域においては、その性質のために不等式の適用が難しくなります。実数の大小関係は一意に定義されますが、複素数は二次元平面上の点として表現されるため、単純な大小関係を定義することができません。すなわち、複素数の間で「大きい」や「小さい」を定義する一般的な方法が存在しないのです。

本書では、まず複素数において不等式が使えない理由とそれを打破するための、複素数間の大小関係を定義します。さらに、その定義を抽象化し、環においても拡張不等式を定義しなおします。環においての拡張不等式については、第 2 編で取り扱います。

本書の最終目的は、環において不等式を定義する方法を明確に示し、その理論的背景と応用について探求することです。環に特有の性質を考慮した不等式の定義方法を提案します。さらに、提案する不等式がどのようにして環の演算と整合するかを具体例を通じて検証し、その有用性を実証します。

この研究が、不等式に関する新たな視点を提供し、さらなる研究の発展に寄与することを期待しています。

なお、拡張不等式は現在も研究途中であり、内容は予告なく変更される可能性があります。

2　複素数の不等式

複素数では、実数のように大小関係を定義することができません。その理由は、主に以下のようなような不等式の性質が破綻するためです。

■虚数における不等式の矛盾　仮に複素数に大小関係が定義されていたとします。

そこで、もし $i > 0$ であると仮定するとこの不等式の両辺に i を掛けることで、$i^2 = -1$ から $-1 > 0$ という矛盾した結論が生じます。$i < 0$ であると仮定したとしても、$-1 > 0$ という矛盾した結論が生じます。$i = 0$ でないことは明らかなので、0 と i は比較することができない (比較不能) となります。

このために、複素数においては実数のような大小関係を定義することはできないとされます。

この矛盾した結論は、$a < b$ としたとき、「$0 < c$ と仮定すると $ac < bc$」であり、「$c < 0$

と仮定すると $ac > bc$」が成立しなければならないという不等式の性質によるものですが、この性質を変拡張する事はこれまでの不等式の性質を根底から見直しする必要に迫られます。

■拡張不等式の概念　そこで拡張不等式は、比較する不等号の向きを大きいか小さいかの 2 種類だけでなく、複素数のように 2 次元の広がりを持つ数に向けて、360 度全方位に向けて拡張します。これまでは、大きいか小さいかの 2 択でしたが、拡張不等式は、比較する数がどの方向を向いているのかで考えます。

例えば、虚数単位 i は、0 より右方向でもなく（大きくもなく）、左方向に位置するものでもなく（小さくもなく）、上方向（もしくは下方向）に位置していると考えます。

拡張不等式では、大きい小さいの概念を向きの概念い拡張し、これまでの比較不能の問題を解決します。

不等号の向きで不等号を考えることで、一貫性を維持しながら複素数においても不等式を定義することができるようになります。

3　(C2) 拡張不等式

拡張不等式を定義するためには、ポジティブ集合が必要になります。

そこでまず、ポジティブ集合の定義を行います。

ここでは、わかりやすく複素数体を対象に記述していますが、通常の体（ただし標数 =0）においても複素数体と同じようにポジティブ集合が定義できます。

定義 3.1 (ポジティブ集合)**.** $\mathbb{C}$ の部分集合で下記の条件を満たす集合 P ものをポジティブ集合と呼ぶ。

条件 (1)　$\alpha, \beta \in P \implies \alpha + \beta \in P$
条件 (2)　$0 \notin P$
条件 (3)　$\alpha \in P \implies -\alpha \notin P$
条件 (4)　$1 \in P$

条件 (1) は、不等式の推移律を満足させるための条件です。

条件 (2) と (3) は、大きいと小さいを同時に満たすことがないようにする条件です。

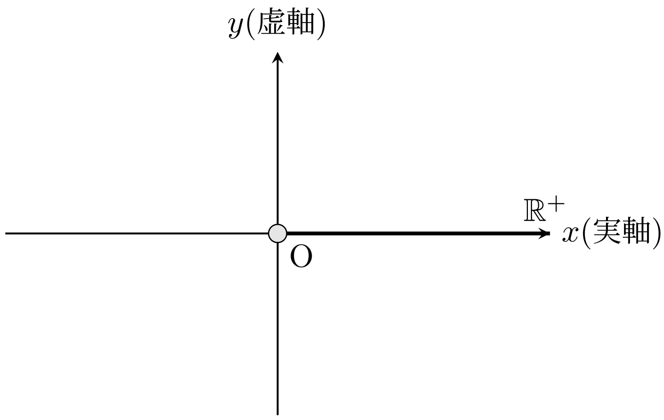
条件 (4) は、より一般的に $P \neq \varnothing$ とした方が汎用的な定義となりますが、$1 \in P$ と限定しても拡張不等式の本質は失われないので、このように定義しています。これは、暗に乗法の単位元が存在していることを前提にしている事になります。

条件 (1) と (4) から $\mathbb{N} \subset P$ が導かれます。

すぐにわかるように、次の例で示す $\mathbb{R}^+$ はポジティブ集合の条件を満たしています。

例 3.2 (ポジティブ集合の例)**.**

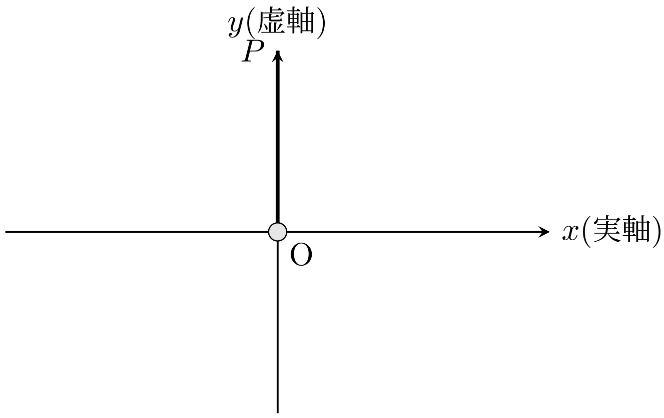
$$\mathbb{R}^+ = \{x + yi | x > 0, y = 0\} \tag{3.1}$$



この例からポジティブ集合が最低１つは存在することがわかります。

例 3.3 (ポジティブ集合でない例)**.**

$$P = \{x + yi | x = 0, y > 0)\} \tag{3.2}$$



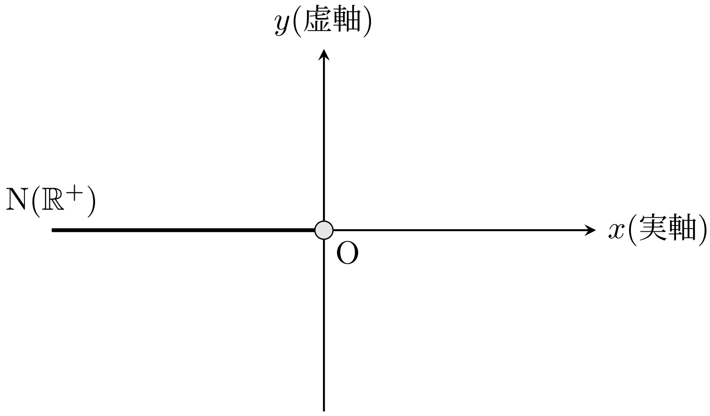
この集合 P は、条件 (4) を満たさないため、ポジティブ集合ではありません。

定義 3.4 (ネガティブ集合)**.** ポジティブ集合 P にたいしてネガティブ集合 $\mathrm{N}(P)$ を次のように定義します。

$$\mathrm{N}(P) \overset{\mathrm{def}}{=} \{-\alpha \mid \alpha \in P\} \tag{3.3}$$

例 3.5 (ネガティブ集合の例)**.**

$$\mathrm{N}(\mathbb{R}^+) = \{x + yi | x < 0, y = 0\} \tag{3.4}$$



ポジティブ集合の条件 (3) より、$P \cap \mathrm{N}(P) = \varnothing$ となります。

定義 3.6 (拡張不等号)**.** 0 でない複素数 θ にたいして、以下のように記す不等号記号を拡張不等号と呼ぶ。$<_{[\theta]}$、$>_{[\theta]}$、$\leqq_{[\theta]}$、$\geqq_{[\theta]}$

定義 3.7 (拡張不等式)**.** 任意の複素数 $\alpha \neq \beta$、$\theta \neq 0$、ポジティブ集合 P に対して $<_{[\theta]}$、$>_{[\theta]}$、$\leqq_{[\theta]}$、$\geqq_{[\theta]}$、を次のように定義する。

$$\alpha <_{[\theta]} \beta \overset{\mathrm{def}}{=} (\beta - \alpha) \in P\ \theta \tag{3.5}$$

$$\alpha >_{[\theta]} \beta \overset{\mathrm{def}}{=} (\alpha - \beta) \in P\ \theta \tag{3.6}$$

$$\alpha \leq_{[\theta]} \beta \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha <_{[\theta]} \beta \text{ または } \alpha = \beta \tag{3.7}$$

$$\alpha \geq_{[\theta]} \beta \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha >_{[\theta]} \beta \text{ または } \alpha = \beta \tag{3.8}$$

ここで、$P\ \theta$ は、$\{x\ \theta\ | x \in P\}$ という集合を表す。

文字数節約のため短縮的に $\alpha <_{[\theta]} \beta$ を $\alpha <_{\theta} \beta$ のように、不等号の添え字につける鍵括弧 [] を省略する表記も使用します。

慣習的に使用される記号の打ち消し記号も使用する。例えば、

$$\alpha \not\leq \beta \overset{\mathrm{def}}{=} \neg(\alpha \leq \beta)$$

と定義されているものとします。

注意 3.8. 拡張不等式で使われているポジティブ集合を明示的に示すためには式の右側にポジティブ集合を併記します。

$$\alpha <_{[\theta]} \beta \quad (P)$$

注意 3.9 (不等号の向き)**.** 不等号 $<_\theta$ の添え字に指定される θ の事を、不等号の向きと呼びます。

注意 3.10 ($<_0$)**.** 拡張不等式の不等号向きは 0 でないことが前提ですが、便宜的に $<_0$ を $=$ の意味として使用し、不等号の向きとして 0 を許す場合がある。こうすることで、いちいち向きについて「0 でない」と断り書きを書く必要が節約されます。

4 ポジティブ集合

以下がよく使用されるポジティブ集合です。拡張不等式の性質は、ポジティブ集合の性質と密接に関連しており、拡張不等式の研究はポジティブ集合の研究とも言えます。

例 4.1 (代表的なポジティブ集合)**.**

$$\mathbb{Q}^+ = \{x + yi | x \in \mathbb{Q}, x > 0, y = 0\} \tag{4.1}$$
$$\mathbb{R}^+ = \{x + yi | x > 0\} \tag{4.2}$$
$$\mathbb{C}^+ = \{x + yi | x > 0 \text{ または } (x = 0, y > 0)\} \tag{4.3}$$

これらがポジティブ集合であることは、定義からすぐにわかる。それぞれのネガティブ集合を、$\mathbb{Q}^-$ 、$\mathbb{R}^-$、$\mathbb{C}^-$ と記す。

注意 4.2. 前提となるポジティブ集合がかわれば、拡張不等号の意味も代わります。たとえば、$0 <_1 i$ は、ポジティブ集合 $\mathbb{R}^+$ の下では偽でありますが、$\mathbb{C}^+$ の下では真です。

$$0 \not<_1 i \quad (\mathbb{R}^+)$$

$$0 <_1 i \quad (\mathbb{C}^+)$$

命題 4.3. 最小のポジティブ集合は、$\mathbb{N}$ です。

証明. $\mathbb{N}$ がポジティブ集合であることは自明。一方、ポジティブ集合の条件 (1)(4) から全てのポジティブ集合は $\mathbb{N}$ を含む。 ■

最小のポジティブ集合は存在するが、対して最大のポジティブ集合は存在しない。

命題 4.4. $\mathbb{C}^+$ は、最大のポジティブ集合ではないが、極大のポジティブ集合である。$\mathbb{C}^+$ は、極大のポジティブ集合である。

証明. $z \neq 0$、$z \notin \mathbb{C}^+$ とすると、$-z \in \mathbb{C}^+$ となる。 ■

命題 4.5. 二つのポジティブ集合 P、Q の共通部分 $P \cap Q$ もポジティブ集合になります。

証明. 自明 ■

命題 4.6. P をポジティブ集合とします。任意の自然数 n, m に対し、

$$\zeta, \eta \in P \implies n\zeta + m\eta \in P$$

証明. ポジティブ集合の条件 (1) を繰り返し適用することで示されます。 ■

■ポジティブ集合のイメージ　ポジティブ集合は、コーン状のイメージとなります。

■拡張不等式の基本性質　拡張不等式の性質を下記に示します。

命題 4.7 (移行)**.** 任意の複素数 α, β, γ, θ に対し、

$$\alpha <_{[\theta]} \beta \implies \alpha + \gamma <_{[\theta]} \beta + \gamma$$

証明. 拡張不等式の定義より明らか。 ■

命題 4.8 (定数倍)**.** 任意の複素数 α, β, γ, θ に対し、

$$\alpha <_{[\theta]} \beta \implies \alpha\gamma <_{[\theta\gamma]} \beta\gamma$$

証明. 拡張不等式の定義より明らか。 ■

命題 4.9 (推移律)**.** 任意の複素数 α, β, γ, θ に対し、

$$\alpha <_{[\theta]} \beta, \beta <_{[\theta]} \gamma \implies \alpha <_{[}\theta] \gamma$$

証明. 拡張不等式の定義より明らか。 ■

命題 4.10 (符号反転)**.** 任意の複素数 α, β, θ に対し、

$$\alpha >_{[\theta]} \beta \implies \alpha <_{[-\theta]} \beta$$

証明. 拡張不等式の定義より明らか。 ■

定義 4.11 (スカラー集合)**.** ポジティブ集合 P にたいしてスカラー集合 $\mathrm{S}(P)$ を次のように定義する。

$$\mathrm{S}(P) \stackrel{\text{def}}{=} \{s|sP \subset P\} \tag{4.4}$$

ここで、sP は、集合 $\{sp|p \in P\}$ の意味である。$\mathrm{S}(P)$ の元を P のスカラーと呼ぶ。

命題 4.12. P をポジティブ集合とすると、スカラー集合 $\mathrm{S}(P)$ もポジティブ集合である。
　また $\mathrm{S}(P) \subset P$、 $\mathrm{S}(P) = P \cap \mathbb{R}$ である。

証明. まず先に、$\mathrm{S}(P) \subset P$ を示す。
　$1 \in P$ より、任意の P の元 p に対して、$p = p \cdot 1 \in pP$ よって、$\mathrm{S}(P) \subset P$ が示される。
　$s, t \in \mathrm{S}(P)$ とすると、$sP \subset P$、$tP \subset P$ である。これから、$(s+t)P = sP + tP \subset P$ がわかる。
　$0 \notin P$ から、$0P = \{0\} \not\subset P$
　$s \in \mathrm{S}(P) \subset P$ とすると、$s \in P$ とな r ので、$-s \notin P$ よって、$-s \notin P$ より $s \in \mathrm{S}(P)$ がわかる。

■

命題 4.13. P をポジティブ集合、$\alpha <_\theta \beta$ とする。$\gamma \in \mathrm{S}(P)$ とすると、

$$\alpha <_{\frac{\theta}{\gamma}} \beta$$

$$\gamma\alpha <_\theta \gamma\beta$$

が成立する。

証明. 定義からあきらか。 ■

5　ポジティブ集合 $\mathbb{R}^+$ における拡張不等式

5.1　1 次拡張不等式

　ポジティブ集合 $\mathbb{R}^+$ の元で、1 次の拡張不等式の解について考察します。1 次の拡張不等式の解は、通常の実数の場合の不等式と同じように簡単に解くことができます。解の分布も複素平面では半直線で表され単純です。
　z を複素変数とする 1 次の拡張不等式は、複素数 ξ、η、 θ を使って下記の形に帰着さ

れます。ここで、$\xi \neq 0$、$\theta \neq 0$ です。

$$0 <_{[\theta]} \xi z + \eta \qquad (\mathbb{R}^+)$$

この式は、移行などによって、

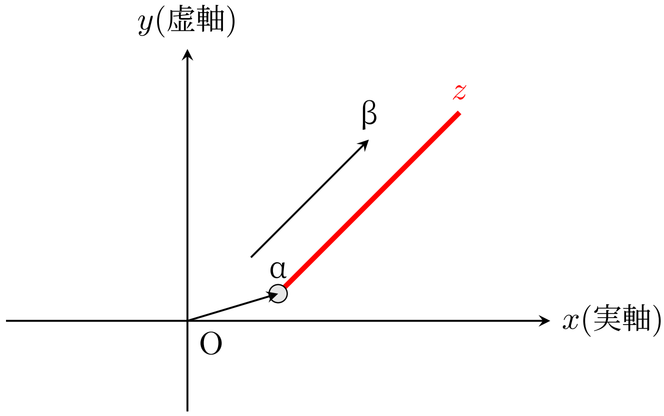
$$-\frac{\eta}{\xi} <_{[\theta/\xi]} z \qquad (\mathbb{R}^+)$$

$\alpha = -\frac{\eta}{\xi}$、$\beta = \frac{\theta}{\xi}$ と置くと、z を複素変数とする 1 次の拡張不等式の解は、下記のように表すことができます。

$$\alpha <_{[\beta]} z \qquad (\mathbb{R}^+)$$

α, β は複素数で、$\beta \neq 0$ です。

解の分布を複素平面で図示すると下記のようになります。α を始点とし β の方向へ伸びる半直線です。



5.2　2 次拡張不等式

ポジティブ集合 $\mathbb{R}^+$ の元で、2 次の拡張不等式の解について考察します。2 次の解の分布は一般的に双曲線となり、1 次の時より複雑です。

z を複素変数とする 2 次の拡張不等式は、複素数 ξ、η、θ を使って下記の形に帰着できます。

$$0 <_{[\theta]} z^2 + \xi z + \eta$$

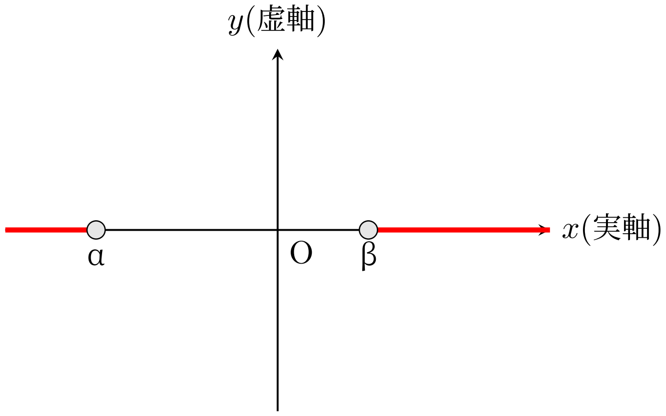
まず、係数 ξ、η、θ が実数の場合で解を求めます。$z^2 + \xi z + \eta = 0$ の解を α、β とすると、2 次拡張不等式は、次の 2 種類になります。

$$0 <_{[1]} (z - \alpha)(z - \beta)$$

$$0 >_{[1]} (z - \alpha)(z - \beta)$$

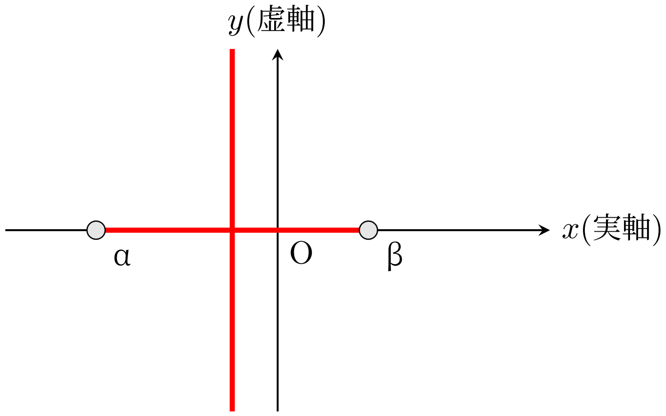
■実数係数の拡張不等式でα、βがともに実数の場合 1　この場合は、よく知られた通常の不等式の解と同じ範囲になります。

$0 <_{[1]} (z - \alpha)(z - \beta)$ の解を複素平面に表すと、下記のようになります。

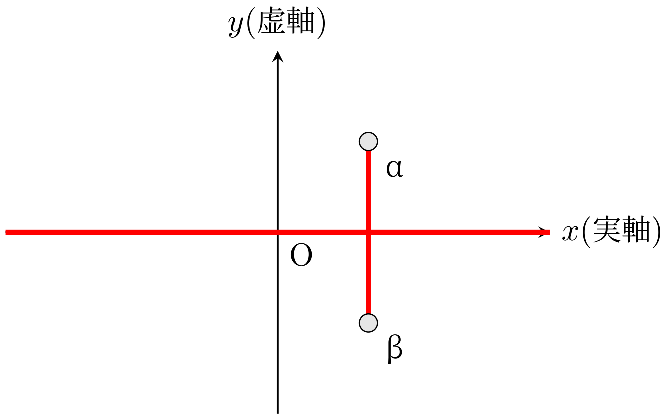


解は、αより小さい実数と、βより大きい実数です。

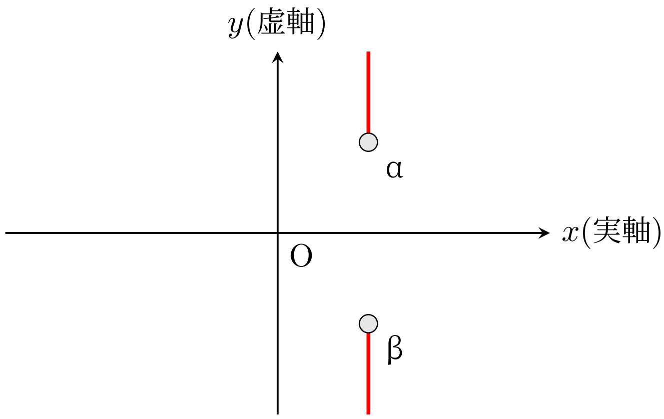
■実数係数の拡張不等式でα、βがともに実数の場合 2　$(z - \alpha)(z - \beta) <_{[1]} 0$ の解を複素平面に表すと、下記のようになります。αより大きくβより小さい実数と、実数部分が $(\alpha + \beta)/2$ である複素数全体です。



■実数係数の拡張不等式でα、βが複素数の場合　βはαの共役複素数となります。$0 <_{[1]} (z - \alpha)(z - \beta)$ の解は、αとβの間にある複素数と実数全体です。

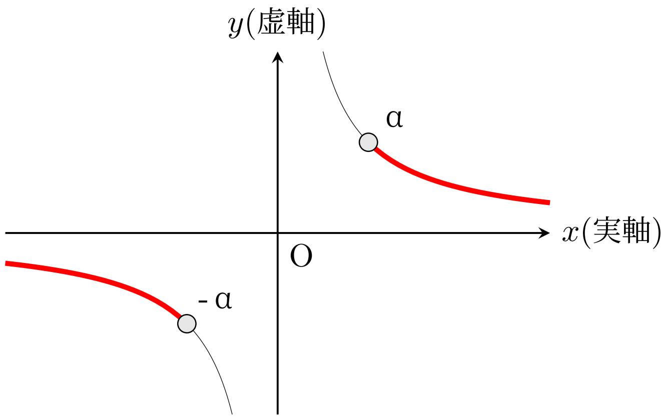


$0 >_{[1]} (z-\alpha)(z-\beta)$ の解はαより上の複素数と、βより下の複素数です。

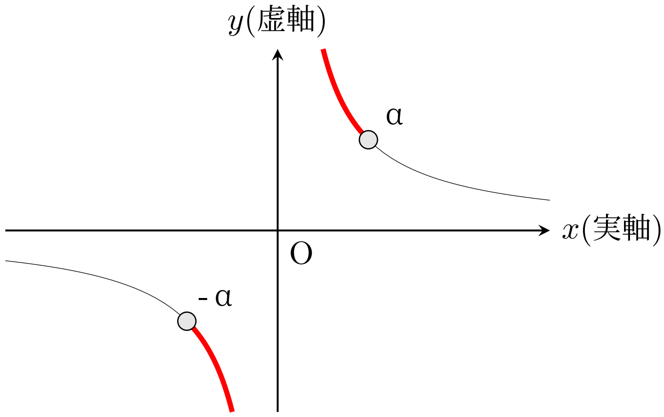


■2 次拡張不等式で $\xi=0$ の場合　$0 <_{[1]} z^2+\eta=(z-\alpha)(z-\beta)$ の 2 次拡張不等式を考えます。$z^2+\eta=0$ の解を α、β とすると $\beta=-\alpha$ で、$\alpha^2=-\eta$ です。

$\alpha^2 <_{[1]} z^2$ を解くと下記のようになります。



不等号の向きが逆の場合の $\alpha^2 >_{[1]} z^2$ を解くと下記のようになります。



■2 次の拡張不等式の一般解　$z^2+\xi z+\eta=(z+\xi/2)^2+\eta-\xi^2/4$ なので、$z'=z+\xi/2$ と変数変換すると、$\xi=0$ の場合の問題に帰着されます。係数が実数の場合の 2 次拡張不等式の解は、直線的な分布になりますが、複素数係数の場合には一般的に双曲線上に解が分布します。

6　(C3) 完全拡張不等式

ポジティブ集合の族は、包含関係の関係において順序関係を持っているので、極大なポジティブ集合を考えることができます。

定義 6.1. 極大なポジティブ集合 $\mathbb{C}^+$ から定義される拡張不等式を完全拡張不等式と呼びます。

命題 6.2. $\mathbb{C}^+=\{x+yi\in\mathbb{C}|(x=0,y>0)$ または $x>0\}$ は極大なポジティブ集合です。

証明. $\mathbb{C}=\mathbb{C}^+\cup\{0\}\cup(-\mathbb{C}^+)$ より　■

極大なポジティブ集合が少なくとも一つ (実際には無限) 存在するので、完全拡張不等式は存在します。

命題 6.3. $<_{[]}$ が' 完全拡張不等式の場合、任意の複素数 α、β、$\theta\neq0$ に対して次のいずれかが成立します。
・$\alpha=\beta$
・$\alpha<_\theta\beta$
・$\alpha>_\theta\beta$

証明. P を極大なポジティブ不等式とすると、$\mathbb{C}=\mathbb{P}\cup\{0\}\cup(-\mathbb{P})$ であるので、$\frac{β-α}{θ}$ は、P に属するか、$-P$ に属します。P に属するなら、 α $<_θ$ β となりますが、そうでなければ $-P$ に属するわけですから、α $>_θ$ β となります。 ■

7 ポジティブ集合 $\mathbb{C}^+$ における拡張不等式

$f(z)$ を:$\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ の複素関数とします。「$0 <_θ f(z) \quad (P)$」を解くとは、f の逆像 $f^{-1}(P\ θ)$ を求める事と同じです。ポジティブ集合 P が極大の場合は、$\mathbb{C}=f^{-1}(P\ θ)\cup f^{-1}(\{0\})\cup f^{-1}(-P\ θ)$ となりますから、完全拡張不等式は複素平面を 3 つの領域に分割します。いくつかの複素関数を例に、完全拡張不等式が複素平面を分割しているのかを調べてみます。

ここでは、極大ポジティブ集合として、下記の $\mathbb{C}^+$ を使います。

$$\mathbb{C}^+=\{x+yi\in\mathbb{C}|x>0 \text{ または } (x=0 \text{ かつ } y>0)\}$$

7.1 1 次完全拡張不等式 ($\mathbb{C}^+$)

まずは、簡単な次の 1 次完全拡張不等式の解を求めます。

$$0 <_1 (a+bi)z+(c+di)$$

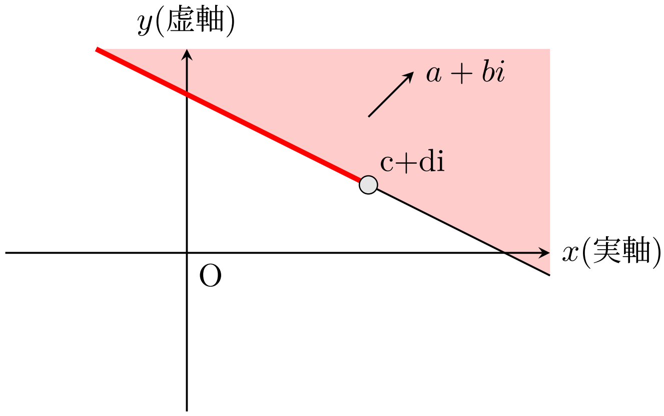
a,b,c,d は実数の定数で、$a+bi\neq 0$ です。

$z=x+iy, x,y\in\mathbb{R}$ と置くと、

$$0 <_1 (a+bi)z+(c+di)=(ax-by+c)+(ay+bx+d)i$$

ですから、$(ax-by+c)+(ay+bx+d)i\in\mathbb{C}^+$ であるためには、$ax-by+c>0$ または $ax-by+c=0, ay+bx+d>0$ である必要があります。

これをもとに複素平面で解を示すと、



となります。

7.2　2 次完全拡張不等式 1 ($\mathbb{C}^+$)

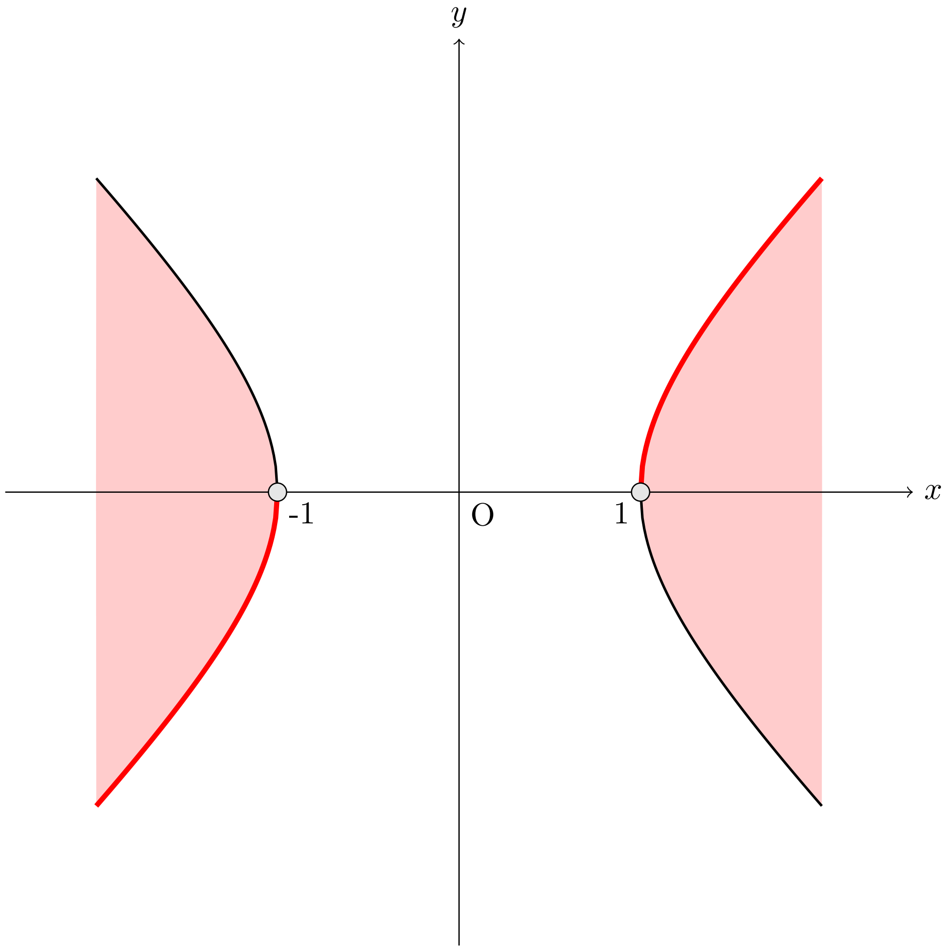
2 次の簡単な例として次の完全拡張不等式の解を求めます。

$$1 <_1 z^2$$

$z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ と置くと、

$$1 <_1 z^2 = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

ですから、$1 <_1 z^2 \in \mathbb{C}^+$ であるためには、$x^2 - y^2 - 1 > 0$ または $x^2 - y^2 - 1 = 0, 2xy > 0$ であるので、複素平面では下記の部分になります。



7.3　2 次完全拡張不等式 2（$\mathbb{C}^+$）

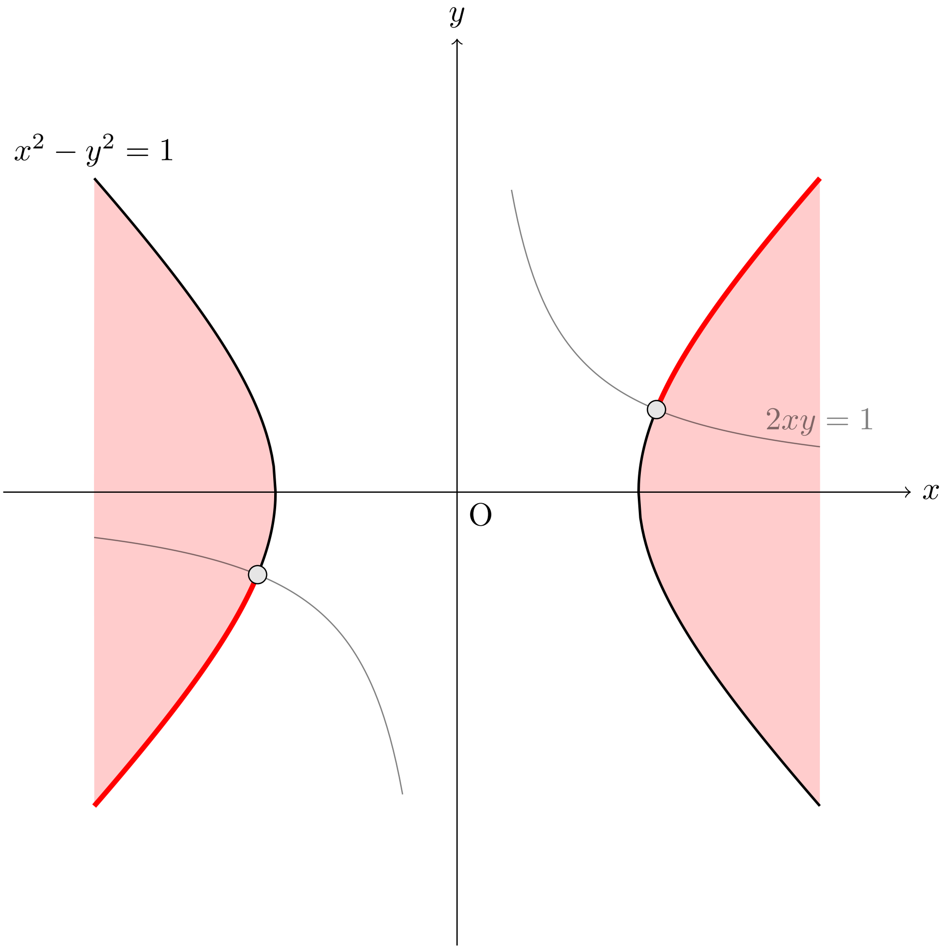
2 次の簡単な例として次の完全拡張不等式の解を求めます。

$$1 + i <_1 z^2$$

$z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ と置くと、

$$1 + i <_1 z^2 = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

ですから、$1 <_1 z^2 \in \mathbb{C}^+$ であるためには、$x^2 - y^2 - 1 > 0$ または $x^2 - y^2 - 1 = 0, 2xy - 1 > 0$ であるので、複素平面では下記の部分になります。



7.4　2 次完全拡張不等式 3（$\mathbb{C}^+$）

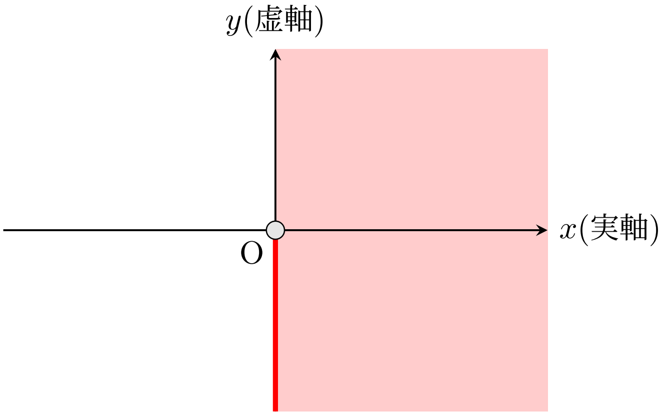
$$a <_1 \frac{1}{z}$$

ここで、a は実数とします。$z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ と置くと、$a < \frac{1}{x+yi} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}$ となります。よって、この拡張不等式の解は、

$$a(x^2 + y^2) <_1 x - yi \quad (\mathbb{C}^+)$$

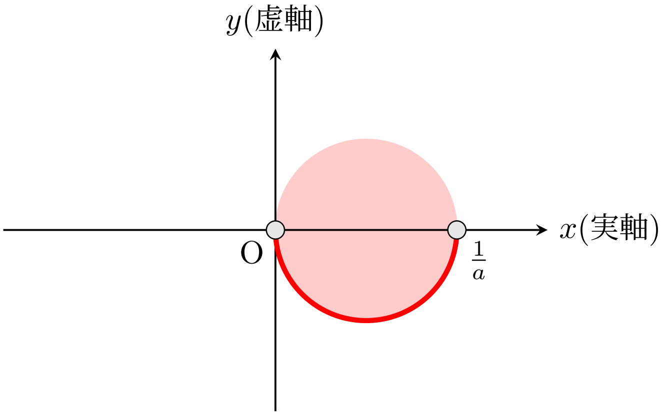
を解くのと同じになります。

$a = 0$ の場合は、$0 <_1 x - yi$ ですから、解の領域は、



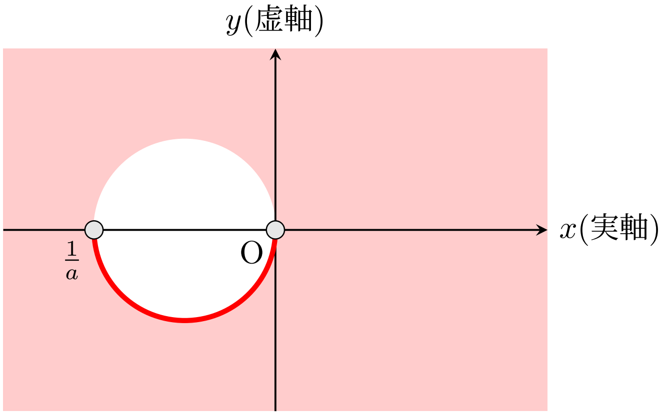
となります。虚軸の部分が反転する (実軸で線対象) 領域になっています。

$0 < a$ の場合は、$(-x^2 - y^2 + \frac{x}{a}) - \frac{y}{a}i \in \mathbb{C}^+$ ですので、



となります。

$a < 0$ の場合には円が第 2-3 象限に入ります。



謝辞

WEB からはたくさんの情報をいただきました。特に、Wikipedelia から学んだことは多いです。コンテンツを作成してくださった方々に感謝いたします。

この著作をよんでくださった方々に感謝いたします。

参考文献

[1] 康夫 秋月, 不等式の基礎についての考察, 数学教育学会誌 **2** (1962), no. 3-4, 39–45.
[2] 竹内 平吉, 集合と不等式, 日本数学教育会誌 **50** (1968), no. 1, 6.

索引